

Über rein-wesentliche Erweiterungen

Helmut Zöschinger

Mathematisches Institut der Universität München

Theresienstr. 39, D-80333 München, Germany

E-mail: zoeschinger@mathematik.uni-muenchen.de

Abstract

Let (R, \mathfrak{m}) be a noetherian local ring and let \mathcal{C} be the class of all R -modules M which possess a reflexive submodule U such that M/U is finitely generated. For every R -module $M \in \mathcal{C}$ the canonical embedding $\varphi : M \rightarrow M^{\circ\circ}$ is pure-essential. We investigate in the first section under which conditions the reverse is true, for example if R is a discrete valuation ring or if R does not have nilpotent elements and M is flat. In section 2 we determine all reflexive and flat R -modules with the help of a certain analogy between the localization $R_{\mathfrak{q}}$ and the injective hull of R/\mathfrak{q} . In section 3 we show: If the property 'pure-essential' is transitive for a domain R , then it follows that $\dim(R) \leq 1$.

Key Words: Pure-injective extensions, pure-injective modules, complete modules, mini-max modules, cotorsion modules, Matlis duality.

Mathematics Subject Classification (2010): 13B35, 13C11, 13J10, 16P70.

1 Quasi-reflexive Moduln

Stets sei (R, \mathfrak{m}) ein noetherscher lokaler Ring, E die injektive Hülle seines Restklassenkörpers $k = R/\mathfrak{m}$ und $M^{\circ} = \text{Hom}_R(M, E)$ das Matlis-Duale von M . Wir sagen, M sei *quasi-reflexiv*, wenn die kanonische Einbettung $\varphi : M \rightarrow M^{\circ\circ}$ rein-wesentlich ist, d.h. aus $X \subset M^{\circ\circ}$, $X \cap \text{Bi } \varphi = 0$ und $(X \oplus \text{Bi } \varphi)/X$ rein in $M^{\circ\circ}/X$ stets folgt $X = 0$. Jeder endlich erzeugte R -Modul M ist quasi-reflexiv, denn bekanntlich ist $M \subset \hat{M}$ rein-wesentlich, wegen $\hat{M} \cong M^{\circ\circ}$ also auch φ . Wir fragen uns, wann sich ein quasi-reflexiver R -Modul aus einem reflexiven und einem endlich erzeugten R -Modul zusammensetzt.

Lemma 1.1 *Sei M ein R -Modul und U ein Untermodul von M .*

- (a) Ist M quasi-reflexiv und U rein in M , so ist auch U quasi-reflexiv.
- (b) Ist U reflexiv und M/U quasi-reflexiv, so ist auch M quasi-reflexiv.
- (c) Ist U reflexiv und M/U sogar endlich erzeugt, so ist auch $P(M)$ reflexiv und $M/P(M)$ endlich erzeugt.

Beweis.

- (a) Seien $\varphi : M \rightarrow M^{\circ\circ}$ und $\chi : U \rightarrow U^{\circ\circ}$ die kanonischen Einbettungen und sei $X \subset U^{\circ\circ}$, $X \cap \text{Bi } \chi = 0$, $(X \oplus \text{Bi } \chi)/X$ rein in $U^{\circ\circ}/X$. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & U & \subset & M & \longrightarrow & M/U \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \chi' & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \psi \\
0 & \longrightarrow & U^{\circ\circ}/X & \longrightarrow & M^{\circ\circ}/\alpha(X) & \longrightarrow & (M/U)^{\circ\circ} \longrightarrow 0
\end{array}$$

sind dann beide Zeilen rein-exakt (die untere mit dem von $U \subset M$ induzierten Monomorphismus $\alpha : U^{\circ\circ} \rightarrow M^{\circ\circ}$ sogar zerfallend), so daß mit χ' und ψ auch φ' ein reiner Monomorphismus ist, denn für jeden R -Modul A sind $1_A \otimes \chi'$ und $1_A \otimes \psi$ injektiv, also auch $1_A \otimes \varphi'$. Weil M quasi-injektiv war, folgt $\alpha(X) = 0$, $X = 0$ wie verlangt.

- (b) Wir zeigen im 1.Schritt für jede reine Erweiterung $A \subset B$: Ist $U \subset A$ und A/U rein-wesentlich in B/U , so auch A in B . Zum Beweis sei $X \subset B$, $X \cap A = 0$ und $(X \oplus A)/X$ rein in B/X . Dann ist auch $(X + A)/(X + U)$ rein in $B/(X + U)$, mit $\overline{B} = B/U$ also $\overline{X} \cap \overline{A} = 0$ und $(\overline{X} \oplus \overline{A})/\overline{X}$ rein in $\overline{B}/\overline{X}$. Nach Voraussetzung folgt $\overline{X} = 0$, $X \subset U$, $X = 0$ wie verlangt.

Seien im 2.Schritt U und M/U wie angegeben. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & U & \subset & M & \longrightarrow & M/U \longrightarrow 0 \\
& & \cong \downarrow \chi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\
0 & \longrightarrow & U^{\circ\circ} & \xrightarrow{\alpha} & M^{\circ\circ} & \xrightarrow{\beta} & (M/U)^{\circ\circ} \longrightarrow 0
\end{array}$$

ist dann $\text{Bi } \alpha \subset \text{Bi } \varphi \subset M^{\circ\circ}$ und $\text{Bi } \varphi / \text{Bi } \alpha$ nach Voraussetzung rein-wesentlich in $M^{\circ\circ} / \text{Bi } \alpha$, also nach dem ersten Schritt $\text{Bi } \varphi$ rein-wesentlich in $M^{\circ\circ}$.

- (c) Für jeden R -Modul M sei $P(M)$ der größte radikalvolle Untermodul von M . Wir zeigen im *1.Schritt* für jeden reflexiven R -Modul A , daß $A/P(A)$ endlich erzeugt ist: Ein Komplement V von $\mathfrak{m}A$ in A ist endlich erzeugt, ein Komplement W von V in A ist radikalvoll, so daß $W \subset P(A)$ die Behauptung liefert. Sind im *2.Schritt* U und M/U wie angegeben, folgt aus $P(M/U) = 0$, $P(M) \subset U$ die Reflexivität von $P(M)$, und in der exakten Folge

$$0 \longrightarrow \frac{U}{P(M)} \subset \frac{M}{P(M)} \longrightarrow \frac{M}{U} \longrightarrow 0$$

ist nach dem ersten Schritt $U/P(M)$ endlich erzeugt, also auch $M/P(M)$.

□

Sei jetzt \mathcal{C} die Klasse aller R -Moduln M , bei denen $P(M)$ reflexiv und $M/P(M)$ endlich erzeugt ist. Punkt (b) des Lemmas liefert sofort

Folgerung 1.2 *Jeder R -Modul $M \in \mathcal{C}$ ist quasi-reflexiv.*

Die anfangs gestellte Frage lautet jetzt genauer: Wann gehört ein quasi-reflexiver R -Modul M zur Klasse \mathcal{C} ? Teilantworten dazu geben wir in den Beispielen 1 und 2 sowie in (1.7) und (1.9).

Lemma 1.3 *Die Klasse \mathcal{C} ist gegenüber Untermoduln, Faktormoduln und Gruppenerweiterungen abgeschlossen.*

Beweis. Ist $M \in \mathcal{C}$ und $U \subset M$, so ist $U \cap P(M)$ reflexiv und $U/U \cap P(M)$ endlich erzeugt, ebenso $(U + P(M))/U$ reflexiv und $M/(U + P(M))$ endlich erzeugt, nach (1.1c) also $U \in \mathcal{C}$, $M/U \in \mathcal{C}$. Zur Umkehrung seien jetzt M beliebig und U , $M/U \in \mathcal{C}$: Dann ist M minimax und R/\mathfrak{p} vollständig für alle $\mathfrak{p} \in \text{Koass}(M) \subset \text{Koass}(U) \cup \text{Koass}(M/U)$, also nach [15, Satz 2.8] $P(M)$ reflexiv und $M/P(M)$ koatomar, $M \in \mathcal{C}$. □

Bemerkung 1.4 Definiert man \mathcal{C}' als die Klasse aller R -Moduln M , bei denen $P(M)$ reflexiv und $M/P(M)$ nur koatomar ist, so zeigt der zitierte Satz 2.8, daß M genau dann zu \mathcal{C}' gehört, wenn für alle Faktormoduln M/V gilt: $\text{Ass}(M/V) = \text{Ass}((M/V)^{\circ\circ})$.

Beispiel 1 *Sei M quasi-reflexiv und von der Form $M \cong X^{(I)}$ mit X endlich erzeugt. Dann ist M bereits endlich erzeugt.*

Beweis. M ist im Sinne von [16, p.7] totalsepariert, also die rein-injektive Hülle N nach dem dortigen Lemma 2.1 separiert. Damit ist $M^{\circ\circ} \cong N$ separiert, M° halbartinsch, M koatomar. Wäre $X \neq 0$ und I nicht endlich, folgte $\text{Ass}(X) = \{\mathfrak{m}\}$, denn für jedes $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ ist $(R/\mathfrak{p})^{(\mathbb{N})}$ nicht koatomar. Also ist X halbartinsch, ja sogar von endlicher Länge und deshalb nach Zimmermann [8, Beispiel 2.6.1] Σ -rein-injektiv. Damit wäre M rein-injektiv, $\varphi : M \rightarrow M^{\circ\circ}$ ein Isomorphismus, M reflexiv, I endlich entgegen der Annahme. □

Beispiel 2 Sei M quasi-reflexiv und R ein diskreter Bewertungsring. Dann folgt $M \in \mathcal{C}$.

Beweis. 1.Schritt: Ist M ein R -Modul und $M/\mathfrak{m}M$ endlich erzeugt, folgt $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ mit M_1 teilbar, M_2 separiert und torsionsfrei, M_3 von endlicher Länge. Zum Beweis sei M_3 ein Basis-Untermodule von $T(M)$. Dann ist auch $M_3/\mathfrak{m} \cdot M_3$ endlich erzeugt, also M_3 von endlicher Länge, $T(M) = D_1 \oplus M_3$ mit D_1 teilbar, $M = T(M) \oplus M_0$ mit M_0 torsionsfrei, also $M_0 = D_2 \oplus M_2$ mit D_2 teilbar und M_2 separiert. Mit $M_1 = D_1 \oplus D_2$ folgt die Behauptung.

2.Schritt Sei jetzt M quasi-reflexiv. Nach Fuchs, Salce und Zanardo [2, Lemma 1.5] ist dann M°/M teilbar, also $M/\mathfrak{m}M$ nach [14, Folgerung 1.5] reflexiv, d.h. endlich erzeugt und deshalb $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ wie im ersten Schritt. Alle drei Summanden sind nach (1.1a) wieder quasi-reflexiv: $M_1 = D(M)$ ist damit schon reflexiv und M_2 sogar totalsepariert, also wie im Beweis von Beispiel 1 koatomar, also wegen torsionsfrei schon endlich erzeugt und frei. (Hier ist also jeder quasi-reflexive R -Modul bereits reflexiv oder endlich erzeugt.) \square

Lemma 1.5 Sei R wieder beliebig, $A \subset B$ rein-wesentlich und $Z(B) \subset A$. Dann folgt für jeden injektiven Untermodul X von B bereits $X \subset A$.

Beweis. Für jeden R -Modul M sei $Z(M)$ der singuläre Untermodul von M . Mit $A_1/A = Z(B/A)$ ist dann A groß in A_1 , also wegen der Reinheit $A = A_1$, d.h. $Z(B/A) = 0$.

Den injektiven Modul $X \subset B$ können wir gleich uniform annehmen. Wäre $X \not\subset A$, also $0 \neq X/X \cap A \cong (X + A)/A \subset B/A$, folgte aus $Z(X/X \cap A) = 0$ bereits $X \cap A = 0$, $(X \oplus A)/A$ direkter Summand in B/A , also auch $(X \oplus A)/X$ rein in B/X , und damit der Widerspruch $X = 0$. \square

Folgerung 1.6 Sei R ohne nilpotente Elemente, $A \subset B$ rein-wesentlich und B torsionsfrei. Dann folgt $D(B) \subset A$.

Beweis. Weil R keine nilpotenten Elemente hat, ist bekanntlich jeder teilbare und torsionsfreie R -Modul bereits injektiv und flach. Wegen $Z(B) = T(B) = 0$ folgt mit (1.5) die Behauptung. \square

Satz 1.7 Sei R ohne nilpotente Elemente, M quasi-reflexiv und torsionsfrei. Dann gilt:

- (a) M hat endliche Goldie-Dimension.
- (b) $D(M)$ ist reflexiv.
- (c) $M/D(M)$ ist kotorsion und separiert.

Beweis. (b) Weil der divisible Anteil $D(M)$ teilbar und torsionsfrei, also injektiv ist, folgt $M = D(M) \oplus M_1$. Beide Summanden sind nach (1.1a) wieder quasi-reflexiv, also $D(M)$ bereits reflexiv.

Für (a) und (c) sei jetzt gleich $D(M) = 0$. Nach (1.6) folgt dann $D(M^{\circ\circ}) = 0$, also M° torsion, so daß alle $\mathfrak{p} \in \text{Koass}(M) = \text{Ass}(M^{\circ})$ regulär sind, d.h. M im Sinne von [14] kotorsion ist. Satz 2.1 dieser Arbeit sagt dann, daß M von endlicher Goldie-Dimension ist, und Bemerkung 2.2, daß M in seiner injektiven Hülle $E(M)$ klein ist. Weil aber $E(M)$ teilbar und torsionsfrei, also flach ist, folgt nach [13, Satz 1.2] $\bigcap_{i \geq 1} \mathfrak{m}^i M = 0$. \square

Bemerkung 1.8 Sei weiter R ohne nilpotente Elemente. (1) Falls $\mathfrak{m} \neq 0$, ist \mathfrak{m} bereits regulär, in (b) und (c) also $D(M) = P(M)$. (2) Ist $M = D(M) \oplus M_1$ wie im Beweis des Satzes und hat $\text{Koass}(M_1)$ eine endliche finale Teilmenge (z.B. wenn $\dim(R) \leq 1$ ist, oder M_1 minimax, oder M_1 flach [13, Satz 2.1]), so ist M_1 im Sinne von [14] sogar stark kotorsion, also nach dem dortigen Satz 2.3 endlich erzeugt. Speziell gilt:

Folgerung 1.9 *Sei R ohne nilpotente Elemente, M quasi-reflexiv und flach. Dann folgt $M \in \mathcal{C}$.*

2 Die reflexiven flachen Moduln

Ist R ein lokaler Integritätsring mit Quotientenkörper $K \neq R$, so folgt aus (1.7) und (1.8) sofort die Struktur aller reflexiven torsionsfreien R -Moduln: Sie sind von der Form $K^n \times M_1$ mit M_1 endlich erzeugt und vollständig, und K ist genau dann reflexiv, wenn R eindimensional und vollständig ist. Hat aber R Nullteiler, muß man K durch bestimmte Lokalisierungen $R_{\mathfrak{q}}$ ($\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$) ersetzen (Satz 2.6), und es zeigt sich eine bemerkenswerte Parallelität zwischen $R_{\mathfrak{q}}$ und $E(R/\mathfrak{q})$, der wir in den ersten drei Lemmata nachgehen.

Lemma 2.1 *Für ein Primideal $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$ sind äquivalent:*

- (i) $M = R_{\mathfrak{q}}$ besitzt eine Koprämärzerlegung.
- (ii) $N = E(R/\mathfrak{q})$ besitzt eine Primärzerlegung.
- (iii) $h(\mathfrak{q}) = 0$.
- (iv) M ist rein-injektiv.

Beweis.

(i \leftrightarrow iii) Weil alle Elemente von $S = R \setminus \mathfrak{q}$ auf M bijektiv operieren, hat M genau dann eine Koprämärzerlegung als R -Modul, wenn M_S eine als R_S -Modul hat [11, Lemma 1.7], d.h. wenn der Ring $R_{\mathfrak{q}}$ artinsch ist.

(ii \leftrightarrow iii) Ein beliebiger injektiver R -Modul B hat nach [12, Lemma 3.5] genau dann eine Primärzerlegung, wenn $\text{Ass}(B) \subset \text{Min}(R)$ ist.

(iii \leftrightarrow iv) Nach einem Satz von F.K.Schmidt (siehe [5, Satz 2.4.1]) gilt für jeden noetherschen lokalen Integritätsring R : Ist $R \subset T \subsetneq K$ ein Oberring und T lokal und henselsch, so ist T ganz über R . Insbesondere ist für jedes Primideal $0 \neq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$ der lokale Integritätsring $R_{\mathfrak{q}}$ *nicht* vollständig. Auch wenn R Nullteiler hat, gilt deshalb für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$, daß $\text{Koass}_{R_{\mathfrak{q}}}(\widehat{R_{\mathfrak{q}}}) = \text{Spec}(R_{\mathfrak{q}})$ ist [13, Satz 2.1], also $R_{\mathfrak{q}}$ als lokaler Ring nur dann vollständig ist, wenn $h(\mathfrak{q}) = 0$ ist (vgl. [4, Proposition 11.5] oder [3, Lemma 2.1]).

Weil nun $M = R_{\mathfrak{q}}$ genau dann als R -Modul rein-injektiv ist, wenn es M_S als R_S -Modul ist [4, Theorem 7.1], folgt die Behauptung. \square

Lemma 2.2 *Für ein Primideal $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$ sind äquivalent:*

- (i) $M = R_{\mathfrak{q}}$ ist ein Minimax-Modul.
- (ii) $N = E(R/\mathfrak{q})$ ist ein Minimax-Modul.
- (iii) $h(\mathfrak{q}) = 0$ und $\dim(R/\mathfrak{q}) = 1$.

Beweis.

(i \rightarrow iii) Jeder Minimax-Modul erfüllt die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln, so daß aus $\mathfrak{q}^e M = \mathfrak{q}^{e+1} M = \dots$ für ein $e \geq 1$ folgt $h(\mathfrak{q}) = 0$. Weil $M/\mathfrak{q}M \cong \kappa(\mathfrak{q})$ auch als R/\mathfrak{q} -Modul minimax ist, gilt nach [9, Lemma 1.1] $\dim(R/\mathfrak{q}) = 1$.

(iii \rightarrow i) Wegen $\dim(R/\mathfrak{q}) = 1$ ist $\kappa(\mathfrak{q})$ als R/\mathfrak{q} -Modul, also auch als R -Modul minimax. Mit $M/\mathfrak{q}M$ sind dann auch alle $M/\mathfrak{q}^n M$ ($n \geq 2$) minimax, wegen $h(\mathfrak{q}) = 0$ also schon M selbst.

(ii \leftrightarrow iii) Ein beliebiger injektiver R -Modul B ist nach [10, Folgerung 2.5] genau dann minimax, wenn B endliche Goldie-Dimension hat und für jedes $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(B/L(B))$ gilt: $h(\mathfrak{p}) = 0$ und $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$. \square

Lemma 2.3 *Für ein Primideal $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$ sind äquivalent:*

- (i) $M = R_{\mathfrak{q}}$ ist reflexiv.
- (ii) $N = E(R/\mathfrak{q})$ ist reflexiv.
- (iii) $h(\mathfrak{q}) = 0$ und R/\mathfrak{q} ist eindimensional und vollständig.
- (iv) $M \cong N^{\circ}$.
- (v) $N \cong M^{\circ}$.

Beweis. Ein beliebiger R -Modul A ist genau dann reflexiv, wenn A minimax und $R/\text{Ann}_R(A)$ vollständig ist (siehe [14, Lemma 1.1] oder [1, Theorem 12]). Damit folgen die ersten drei Äquivalenzen sofort aus (2.2): Bei $(i \rightarrow iii)$ ist $\mathfrak{q} \in \text{Ass}(M^\circ)$, bei $(ii \rightarrow iii)$ $\mathfrak{q} \in \text{Ass}(N)$, also beide Male R/\mathfrak{q} als Untermodul eines reflexiven Moduls vollständig. Bei $(iii \rightarrow i)$ folgt aus $h(\mathfrak{q}) = 0$, daß $\mathfrak{q}^e \subset \text{Ann}_R(M)$ ist für ein $e \geq 1$, bei $(ii \rightarrow i)$ entsprechend $\mathfrak{q}^e \subset \text{Ann}_R(N)$, also beide Male die gewünschte Reflexivität.

Bei $(i \rightarrow iv)$ genügt $M \cong A^\circ$ mit irgend einem R -Modul A . Dann ist nämlich A injektiv und unzerlegbar, $A \cong E(R/\mathfrak{p})$ für ein $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$, wegen $\mathfrak{p} = \bigcup \text{Koatt}(A) = \bigcup \text{Att}(M) = \mathfrak{q}$ also $A \cong N$. Bei $(ii \rightarrow v)$ genügt $N \cong B^\circ$ mit irgend einem R -Modul B , denn dann ist B flach, unzerlegbar und $\text{Koass}(B) = \{\mathfrak{q}\}$, also nach [13, Beispiel 2.6] $B \cong M$.

Bei $(v \rightarrow iii)$ gilt stets $\text{Ass}(M^\circ) = \text{Koass}(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}\}$, so daß in

$$M^\circ \cong \prod_{\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}} E(R/\mathfrak{p})^{(I_{\mathfrak{p}})}$$

alle $I_{\mathfrak{p}} \neq \emptyset$ sind und $(M/\mathfrak{q}M)^\circ \cong M^\circ[\mathfrak{q}] \cong \kappa(\mathfrak{q})^{(I_{\mathfrak{q}})}$, also $|I_{\mathfrak{q}}| = \dim_{\kappa(\mathfrak{q})}(\kappa(\mathfrak{q})^\square)$ ist (wobei \square das Matlis-Duale über R/\mathfrak{q} sei). Allein daraus, daß M° unzerlegbar ist, folgt jetzt $h(\mathfrak{q}) = 0$ und $|I_{\mathfrak{q}}| = 1$, so daß $\kappa(\mathfrak{q})$ als R/\mathfrak{q} -Modul reflexiv ist, d.h. R/\mathfrak{q} eindimensional und vollständig. Bei $(iv \rightarrow iii)$ gilt nach Schenzel [6, Lemma 2.3] stets

$$N^\circ \cong \widehat{R_{\mathfrak{q}}^{(I)}}$$

mit $|I| = \dim_{\kappa(\mathfrak{q})}(\kappa(\mathfrak{q})^\square)$. Aus (iv) folgt deshalb $|I| = 1$, d.h. wie eben R/\mathfrak{q} eindimensional und vollständig, außerdem $R_{\mathfrak{q}} \cong \widehat{R_{\mathfrak{q}}}$, also mit der Äquivalenz $(iii \leftrightarrow iv)$ in (2.1) auch noch $h(\mathfrak{q}) = 0$. \square

Bemerkung 2.4 Allein aus der obigen Darstellung von N° folgt eine Verschärfung des Theorems 1.1 in [6]: Genau dann ist $E(R/\mathfrak{q})^\circ \cong \widehat{R_{\mathfrak{q}}}$, wenn $|I| = 1$, d.h. R/\mathfrak{q} eindimensional und vollständig ist.

Bemerkung 2.5 Definiert man für einen R -Modul A und ein Primideal \mathfrak{p} die (0-te) Bass-Zahl $\mu(\mathfrak{p}, A) = \text{Rang}_{R/\mathfrak{p}}(A[\mathfrak{p}])$, so ist A nach [17, Folgerung 1.2] genau dann reflexiv, wenn $\mu(\mathfrak{p}, A) = \mu(\mathfrak{p}, A^{\circ\circ})$ gilt für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$. Im Spezialfall $N = E(R/\mathfrak{q})$, mit $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$, ist nun die Bedingung $\mu(\mathfrak{p}, N) = \mu(\mathfrak{p}, N^{\circ\circ})$ äquivalent damit, daß entweder $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$ ist oder $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, R/\mathfrak{p} eindimensional und vollständig. Verlangt man das für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$, erhält man einen neuen Beweis für $(ii \leftrightarrow iii)$; verlangt man das nur für $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, ist $\mu(\mathfrak{q}, N) = \mu(\mathfrak{q}, N^{\circ\circ})$ äquivalent mit der Situation in (2.4).

Satz 2.6 Ein flacher R -Modul M ist genau dann reflexiv, wenn er von der Form

$$M \cong R_{\mathfrak{p}_1} \times \cdots \times R_{\mathfrak{p}_n}$$

ist, wobei für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt: Falls $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}$, ist R vollständig; falls $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{m}$, ist $h(\mathfrak{p}_i) = 0$ und R/\mathfrak{p}_i eindimensional und vollständig.

Beweis. Weil jeder reflexive Modul von endlicher Goldie-Dimension, also direkte Summe von endlich vielen unzerlegbaren Moduln ist, können wir gleich M flach, reflexiv und unzerlegbar annehmen. Aus M° injektiv und unzerlegbar, $M^\circ \cong E(R/\mathfrak{p})$ folgt $\text{Koass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$, also nach [13, Beispiel 2.6] $M \cong R_{\mathfrak{p}}$. Die Zusatzbedingungen sind für $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ klar, und für $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ folgen sie mit (2.3).

Hat umgekehrt M eine Zerlegung wie angegeben, sind alle $R_{\mathfrak{p}_i}$ ($1 \leq i \leq n$) wieder nach (2.3) reflexiv, also auch M . \square

3 Strikt rein-wesentliche Erweiterungen

Eine Modulerweiterung $A \subset B$ heiße *strikt rein-wesentlich*, wenn A rein in B ist und für jeden Homomorphismus $f : B \rightarrow Y$ gilt: Ist $f|_A$ ein reiner Monomorphismus, so auch f (siehe [4, p.128]). Das ist äquivalent damit, daß A rein-wesentlich in B ist und aus $B \subset Y$, A rein in Y , stets folgt B rein in Y . Über einem diskreten Bewertungsring R ist das nichts Neues, denn aus A rein-wesentlich in B folgt nach [2, Lemma 5] B/A teilbar, also direkter Summand in Y/A , und damit B rein in Y . Auch wenn A rein-wesentlich in B ist und B rein-injektiv, ist die Erweiterung nach [7, Proposition 4.4] strikt rein-wesentlich. Im allgemeinen ist unsere Bedingung echt stärker, hat aber den Vorteil, gegenüber Hintereinanderausführung und endlichen Produkten abgeschlossen zu sein.

Ist M ein separierter, flacher R -Modul und $F \subset M$ ein Basis-Untermodule von M , so folgt aus F rein in M , $H(M) = 0$ und M/F radikalvoll, daß die Erweiterung $F \subset M$ *rein-wesentlich* ist [16, Lemma 1.9]. Für die Striktheit muß man mehr verlangen:

Lemma 3.1 *Sei M ein separierter, flacher R -Modul, $F \subset M$ ein Basis-Untermodule von M und $M \subset N$ eine rein-injektive Hülle. Dann sind äquivalent:*

- (i) *Die Erweiterung $F \subset M$ ist strikt rein-wesentlich.*
- (ii) *Die Hintereinanderausführung $F \subset N$ ist rein-wesentlich.*
- (iii) *M ist totalsepariert.*

Beweis. ($i \rightarrow ii$) Stets ist $M \subset N$ strikt rein-wesentlich, nach Voraussetzung aber auch $F \subset M$, und dann natürlich $F \subset N$.

($ii \rightarrow iii$) Dann ist N auch die rein-injektive Hülle von F , also $N \cong \hat{F}$ separiert, und das ist nach [16, Lemma 2.1] äquivalent mit M totalsepariert.

($iii \rightarrow i$) Sei $M \subset Y$ und F rein in Y . Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{F} & \xrightarrow{\cong} & \hat{M} & \xrightarrow{h} & Y' \\
\cup & & \cup & & \uparrow g \\
F & \subset & M & \subset & Y
\end{array}$$

sei das rechte Quadrat eine Fasersumme, so daß auch g ein reiner Monomorphismus ist, weil nach Voraussetzung $M \subset \hat{M}$ rein ist. Stets ist F strikt rein-wesentlich in \hat{F} , also auch h ein reiner Monomorphismus, und es folgt M rein in Y wie gewünscht. \square

Bemerkung 3.2 In [16, (1.11) und (2.8)] werden separierte flache R -Moduln angegeben, die nicht totalepariert sind, bei denen also insbesondere (ii) verletzt ist. Die Frage, ob die Eigenschaft 'rein-wesentlich' transitiv ist, hat eine längere Geschichte, die in der Einleitung zu [2] geschildert wird. Das dortige Hauptergebnis, Theorem 6, besagt: Über einem (nicht notwendig lokalen) Integritätsring T ist die Eigenschaft 'RD-wesentlich' genau dann transitiv, wenn T ein diskreter Bewertungsring ist.

Lemma 3.3 *Für eine Modulerweiterung $A \subset B$ sind äquivalent:*

- (i) $A \subset B$ ist strikt rein-wesentlich.
- (ii) Ist $B \subset C$ rein-wesentlich, so auch $A \subset C$.

Beweis. (i \rightarrow ii) Sei $X \subset C$, $X \cap A = 0$ und $(X \oplus A)/X$ rein in C/X . Mit $f = \text{kan} : B \rightarrow C/X$ ist dann $f|A$ ein reiner Monomorphismus, also nach Voraussetzung auch f , d.h. $X \cap B = 0$ und $(X \oplus B)/X$ rein in C/X . Es folgt $X = 0$.

(ii \rightarrow i) Weil $B \subset B$ rein-wesentlich ist, ist es nach Voraussetzung auch $A \subset B$. Sei nun $B \subset Y$ und A rein in Y . Mit einer rein-injektiven Hülle $B \subset N$ und der Fasersumme

$$\begin{array}{ccc}
N & \xrightarrow{h} & Y' \\
\cup & & \uparrow g \\
B & \subset & Y
\end{array}$$

ist nach Voraussetzung auch $A \subset N$ rein-wesentlich, außerdem g , also auch $A \subset N \xrightarrow{h} Y'$ ein reiner Monomorphismus. Weil $A \subset N$ sogar strikt, also auch h ein reiner Monomorphismus ist, folgt B rein in Y . \square

Folgerung 3.4 *Genau dann ist die Eigenschaft 'rein-wesentlich' transitiv, wenn jede rein-wesentliche Erweiterung bereits strikt rein-wesentlich ist.*

Satz 3.5 *Ist R ein Integritätsring und die Eigenschaft 'rein-wesentlich' transitiv, so folgt $\dim(R) \leq 1$.*

Beweis. Wir zeigen allgemeiner für jeden Ring R : Besitzt R ein reguläres Primideal $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{m}$, so gibt es eine rein-wesentliche Erweiterung $R^{(\mathbb{N})} \subset B$, die *nicht* strikt rein-wesentlich ist (so daß unter den Voraussetzungen des Satzes mit (3.4) die Behauptung folgt).

Ist nämlich $M = R^{(\mathbb{N})}$ und \overline{M} der \mathfrak{m} -adische Abschluß von M in $P = R^{\mathbb{N}}$, so leistet $B = M + \mathfrak{q} \cdot \overline{M}$ das gewünschte. Mit \overline{M}/M ist auch $\mathfrak{q} \cdot \overline{M}/M = B/M$ radikalvoll, wegen M rein in B und $H(B) = 0$ also $M \subset B$ rein-wesentlich [16, Lemma 1.9]. Weiter ist $B \subsetneq \overline{M}$, denn mit irgendeinem $s \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{q}$ ist $x = (1, s, s^2, s^3, \dots) \in \overline{M}$, und wäre $x \in B$, d.h. $x - y \in \mathfrak{q} \cdot \overline{M}$ für ein $y \in M$, folgte $x - y \in \mathfrak{q} \cdot P$, so daß fast alle Koeffizienten von x in \mathfrak{q} lägen, also der Widerspruch $s \in \mathfrak{q}$. Erst jetzt brauchen wir einen NNT $r \in \mathfrak{q}$: Mit ihm folgt $rB \subsetneq r\overline{M} \subset B$, d.h. $rB \subsetneq B \cap r\overline{M}$, so daß B nicht rein in \overline{M} ist, also M nicht strikt rein-wesentlich in B . \square

Lemma 3.6 *Sind $A_1 \subset B_1$ und $A_2 \subset B_2$ strikt rein-wesentliche Erweiterungen, so auch $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$.*

Beweis. Wir zeigen im 1.Schritt für jedes Tripel $U \subset A \subset B$: Ist U rein in B und A/U strikt rein-wesentlich in B/U , so ist auch A strikt rein-wesentlich in B . Klar ist A rein in B , also nach dem ersten Beweisschritt von (1.1b) sogar rein-wesentlich in B . Für die Striktheit sei jetzt $B \subset Y$ und A rein in Y . Aus

$$A/U \subset B/U \subset Y/U$$

und A/U rein in Y/U folgt dann nach Voraussetzung B/U rein in Y/U , also B rein in Y wie verlangt. Seien im 2.Schritt die $A_i \subset B_i$ ($i = 1, 2$) wie angegeben. Die Projektion $B_1 \times A_2 \rightarrow B_1$ und der erste Schritt zeigen, daß $A_1 \times A_2$ strikt rein-wesentlich in $B_1 \times A_2$ ist, entsprechend $B_1 \times A_2$ in $B_1 \times B_2$ und damit folgt die Behauptung. \square

Bei einem quasi-reflexiven R -Modul M ist die Einbettung $\varphi : M \rightarrow M^{\circ\circ}$ sogar strikt rein-wesentlich, sodaß man mit (1.1a) und (3.6) erhält:

Folgerung 3.7 *Eine endliche direkte Summe $M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ ist genau dann quasi-reflexiv, wenn es alle M_i sind ($1 \leq i \leq n$).*

Literatur

- [1] R.G.Belshoff, E.E.Enochs and G.Rozas: Generalized Matlis duality: Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000) 1307-1312
- [2] L.Fuchs, L.Salce and P.Zanardo: Note on the transitivity of pure essential extensions: Colloqu. Math. 78 (1998) 283-291

- [3] M.Hellus and J.Stückrad: Matlis duals of top local cohomology modules: Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008) 489-498
- [4] C.U.Jensen und H.Lenzing: *Model-Theoretic Algebra*: Gordon and Breach (1989)
- [5] H.Kurke, G.Pfister and M.Roczen: *Henselsche Ringe und algebraische Geometrie*: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (1975)
- [6] P.Schenzel: A note on the Matlis dual of a certain injective hull: arXiv 1306.3311 (2013) 1-5
- [7] B.Stenström: Pure submodules: Arkiv Mat. 7 (1967) 159-171
- [8] W.Zimmermann: Rein-injektive direkte Summen von Moduln: Commun. Algebra 5 (1977) 1083-1117
- [9] H.Zöschinger: Minimax-Moduln: J. Algebra 102 (1986) 1-32
- [10] H.Zöschinger: Über die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln: Hokkaido Math. J. 17 (1988) 101-116
- [11] H.Zöschinger: Moduln mit Koprämärzerlegung: Bayer. Akad. Wiss. Math., Naturw. Kl., SB 2 (1990) 5-25
- [12] H.Zöschinger: Die Lasker-Bedingung für nicht endlich erzeugte Moduln: Per. Math. Hungar. 25 (1992) 1-11
- [13] H.Zöschinger: Der Krull'sche Durchschnittssatz für kleine Untermoduln: Arch. Math. 62 (1994) 292-299
- [14] H.Zöschinger: Starke Kotorsionsmoduln: Arch. Math. 81 (2003) 126-141
- [15] H.Zöschinger: Über die assoziierten Primideale des Bidualen: Commun. Algebra 37 (2009) 1977-1994
- [16] H.Zöschinger: Über die assoziierten Primideale der Vervollständigung: arXiv 1206.4523 (2012) 1-14
- [17] H.Zöschinger: Eine Charakterisierung der Matlis-reflexiven Moduln: arXiv 1306.6820 (2013) 1-5